BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

О РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СЕМЕЙСТВА МОМЕНТОВ ПЕРВОГО ВЫХОДА ВОЗМУЩЕННОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ЗА НЕЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

Ф.Г.РАГИМОВ

Бакинский Государственный Университет

В настоящей работе рассматривается семейство моментов первого выхода возмущенного случайного блуждания за нелинейную границ. Изучается вопрос о равномерной интегрируемости разности между линейным и нелинейным моментами остановки. В частности, найдено асимптотические формулы для среднего значения и дисперсии нелинейного момента остановки. Кроме того, для меры нелинейного восстановления получены асимптотические формулы.

1. Введение. Пусть ξ_n, $n \geq 1$ последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$, причем $E\xi_1 = \mu > 0$. Наряду с ξ_n рассмотрим последовательность ε_n, $n \geq 1$ случайных величин, таких, что для каждого $n \geq 1$ случайная величина ε_n не зависит от $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$.

Рассмотрим следующие величины

$$\tau = \tau_a = \inf\{n \geq 1 : T_n \geq f_a(n)\},$$

$$\nu = \nu(c,s) = \inf\{n \geq 1 : S_n - ns > c\},$$

где

$c \geq 0$, $s \leq \mu$ и $T_n = S_n + \varepsilon_n$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ и $f_a(t)$, $a > 0, t > 0$ -некоторое семейство нелинейных границ. В работе [2] рассматриваются разности $|\tau - \nu| = \Delta_a(c,s) \equiv \Delta$ и исследуется вопрос о равномерной интегрируемости семейства $\Delta^r = |\tau - \nu|^r$ для некоторого $r \geq 1$ при надлежащим выборе $c = c(a)$ и $s = s(a)$. Кроме того, в работе [2] получены асимптотические формулы для среднего значения следующих граничных функционалов:

$$V = V_a = 1 + \sup\{n \geq 1 : \quad T_n \leq f_a(n)\}$$

и

$$U = U_a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} J(T_n \le f_a(n)),$$

где $J(A)$ означает индикатор события A. Отметим, что изучение асимптотических свойств распределения величин U и V составляет важную часть теории нелинейного восстановления [1, 2].

Целью этой статьи является изучение равномерной интегрируемости семейства Δ^r для широкого класса, чем в [2], случайных величин и нелинейных границ $f_a(t)$, а также получение асимптотических формул для указанных нелинейных граничных функционалов. Отметим, что эти задачи для случайного блуждания без возмущения изучены в работах [1,3].

2.Условия и обозначения. Будет предполагать, что нелинейная граница $f_a(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) Для каждого a функция $f_a(t)$ монотонно возрастает, непрерывно-дифференцируема при t>0, причем $f_a(1) \uparrow \infty$, $a \to \infty$.

2) $n = n(a) \to \infty$ при $a \to \infty$, так, что $\frac{1}{n} f_a(n) \to \mu$ и $f'_a(n) \to \theta$ для некоторого $\theta \in [0, \mu)$.

3) Для каждого а функция $f'_a(t)$ слабо осциллирует на бесконечности, т.е.

$$\frac{f'_a(n)}{f'_a(m)} \to 1 \text{ при } \frac{n}{m} \to 1,\ n \to \infty.$$

Замечание 1. Отметим, что класс таких функций образует непустое множество. Например, $f_a(t) = at^{\gamma}$, $0 \le \gamma < 1$.

Для формулировки основного результата введем следующее понятие:

Определение 1. Последовательность ε_n, $n \ge 1$ называется регулярной с параметрами $r \ge 1$ и $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, если существуют положительная случайная величина d, функция $g(x)$ и последовательность случайных величин η_n, $n \ge 1$, такие, что

1) $\varepsilon_n = g(n) + \eta_n$ для $n \ge d$ и $Ed^r < \infty$,

2) $\max\limits_{1 \le i \le \sqrt{n}} |g(n+i) - g(n)| \le K < \infty$,

3) Семейство $\left\{ \max\limits_{1 \le i \le n^{\alpha}} |\eta|^r,\ n \ge 1 \right\}$- равномерно интегрируемо,

4) Для любого $\delta > 0$ при $n \to \infty$

$$n^r P\left(\max_{0 \le i \le n} \eta_{n+i} \ge \delta n^\alpha\right) \to 0,$$

5) При $\alpha = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\{\eta_n \le -un\} < \infty$$

для некоторого $u \in (0, \mu - \theta)$.

По поводу этого определения см. [2]. Отметим, что разложение в 1) рассматривалось в ранних работах [1,2], где изучались важные вопросы статистического последовательного анализа.

В случае, когда последовательность ε_n является нерегулярной, мы вместо $g(n)$ возьмем медиану случайной величины ε_n и его будем определять с помощью линейной интерполяции для всех $x \in [1, \infty)$.

Таким образом, мы можем полностью определить величину $\nu = \nu_a = \nu\,(c(a), \theta\,)$, где $c(a) = N_a(\mu - \theta) - g(N_a)$ и $N_a = N_a(\mu)$ есть решение уравнения $f_a(n) = n\mu$.

Обозначим $\xi_1^+ = \max(0, \xi_1)$.

4. Формулировка основных результатов.

Теорема 1. Пусть последовательность $\varepsilon_n, n \ge 1$ регулярна с параметрами $r \ge 1$ и $\alpha \in (1/2, 1]$ и $E\left(\xi_1^+\right)^{r_1} < \infty$, $r_1 = \dfrac{r+1}{\alpha}$.

Предположим, что функция $f_a(t)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем для любого $K > 0$

$$\sup_{t:|t - N_a| \le KN_a^{\alpha}} \left|N_a f_a''(t)\right| < \infty \tag{1}$$

и существуют константы $0 < \delta < 1$ и $\mu^* < \mu$, такие, что для $t \ge \delta\, N_a$

$$f_a'(t) \le \mu^* \tag{2}$$

Если $E\left(\xi_1^+\right)^{2r} < \infty$ и

$$N_a^r P\left(\tau_a \le \delta\, N_a\right) \to 0, \quad a \to \infty \tag{3}$$

то семейство Δ_a^r, $a \ge 0$ является равномерно интегрируемым.

Следствие 1. В условиях теоремы 1 выполнено:

$$E\tau_a = N_a - (\mu - \theta)^{-1} g(N_a) + O(1). \tag{4}$$

Если к тому же $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, то

$$D\tau_a = (\mu - \theta\,)^{-1} \sigma^{\,2} N_a + o(\sqrt{N_a}). \tag{5}$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и для некоторого $u \in (0, \mu - \theta)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\{\sup_{i \ge n}(-\frac{\eta_i}{i}) > u\} < \infty \qquad (6)$$

Тогда семейства $|U_a - \tau_a|^r$ и $|V_a - \tau_a|^r$, $a > 0$ являются равномерно интегрируемыми.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 выполнено:

$$EU_a = N_a - (\mu - \theta)^{-1} g(N_a) + O(1)$$

$$EV_a = N_a - (\mu - \theta)^{-1} g(N_a) + O(1)$$

(7)

Если $\sigma^2 = D\xi_1 < \infty$, то

$$DU_a = (\mu - \theta)^{-2} \sigma^2 N_a + O\left(\sqrt{N_a}\right)$$

$$DV_a = (\mu - \theta)^{-2} \sigma^2 N_a + O\left(\sqrt{N_a}\right)$$

(8)

Замечание. Отметим, что в [3] теорема 1 и следствие 1 доказаны для случая отсутствия возмущения. В теоремах 1 и 2 условие конечности абсолютного момента высшего порядка $E|\xi_1|^{2r} < \infty$, приведенное в работе [2], ослаблено до конечности момента $E(\xi_1^+)^{2r} < \infty$.

4. Доказательство основных результатов. Прежде всего отметим, что техника, применяемая для доказательства теорем 1 и 2 примыкает по схеме к работе [2] (см. также [3]), при этом, используются результаты работы [4], [5].

Нам понадобятся следующие леммы. Не нарушая общности предположим $\mu = 1$.

Лемма 1. Пусть $r \ge 1$ и $\alpha \in (1/2, 1]$.

1) Если

$$E(\xi_1^+)^{r_1} < \infty, \quad r_1 = \frac{r+1}{\alpha},$$

то $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\{\max_{i \le n}(S_i - i) \ge u n^{\alpha}\} < \infty$$

и $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\{\sup_{i \ge n} i^{-\alpha}(S_i - i) \ge u\} < \infty$$

для любого $u > 0$

2) Если

$$c^{r_1} P\{\xi_1^+ \ge c\} \to 0, \quad c \to \infty,$$

то для любого $u > 0$ и $K > 0$

$$\sup_{\frac{1}{K} \le 1-s \le K} c^r P\{\nu(c,s) \le (1-s)^{-1} c - uc^{\alpha}\} \xrightarrow[c\to\infty]{} 0$$

и $n^r\ P\{\max_{i\le n}(S_i - i) \ge u\, n^{\alpha}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

3) Если $E(\xi_1^+)^{2r} < \infty$, то для любой константы $K > 0$ семейство

$$\left\{ \left(\frac{(\nu - (1-s)^{-1}c)^2}{c}\right)^r,\ c \ge 1,\quad K^{-1} \le 1-s \le K \right\}$$

является равномерно интегрируемым.

Утверждения этой леммы часто применяются и в теории случайных блужданий, и в теории восстановления. Их доказательство можно найти в [1] и [4] (см. также [2,5]).

Лемма 2. Пусть выполнены условия (2) и (3) теоремы 1. Тогда для любого $u > 0$

$$P(\tau_a \le N_a - u\, N_a^{\alpha}) = o(N_a^{-r}),\quad a \to \infty.$$

Доказательство. На множестве $\{\omega:\ d < \delta\, N_a < n \le N_a - u\, N_a^{\alpha}\}$ для достаточно больших a находим

$$f_a(n) \ge N_a + \mu^*(n - N_a) \ge n + (1-\mu^*)u\, N_a^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$N_a^r P\{\delta N_a < \tau_a \le N_a - u N_a^{\alpha},\ d < \delta N_a\} \le N_a^r P\{S_n + \eta_n + g(n) > n + (1-\mu^*)u\, N_a^{\alpha}\}$$

для некоторого $n \in (\delta\, N_a,\ N_a]$.

Отметим, что $g(n) = O(\sqrt{n})$ и для любого u и больших a

$$\{\max_{\delta N_a \le n \le N_a} |g(n)| \ge u\, N_a^{\alpha}\} = \varnothing$$

Поэтому, в силу регулярности последовательности ε_n и второй части леммы 1, имеем:

$$N_a^r P\{\tau_a \le N_a - u\, N_a^{\alpha}\} \le N_a^r P\{\tau_a \le \delta\, Na\} + N_a^r P\{d \ge \delta\, N_a\} + N_a^r P\{\max_{n\le N_a}|S_n - n| \ge u'\, N_a^{\alpha}\} +$$

$$+ N_a^r P\{\max_{\delta N_a \le n \le N_a} \eta_n \ge u'\, N_a^{\alpha}\} + N_a^r P\{\max_{\delta Nl a \le n \le N_a} g(n) \ge u'\, N_a^{\alpha}\} = o(1),$$

где $u' = \dfrac{(1-\mu^*)u}{3}$.

Лемма 3. Пусть последовательность $\varepsilon_n, n \geq 1$ регулярна с параметрами $r \geq 1$ и $\alpha \in (1/2,\ 1]$ и выполняется условие (2). Если $E\left|\xi_1^+\right|^r < \infty$, то существует константа $K > 0$, такая, что

$$\sum_{n=m_a} n^{r-1} P(\tau_a > n) \to 0, \quad a \to \infty,$$

где $m_a = [N_a + KN_a^{\alpha}]$.

Доказателство. Из условия 5) определение 1 следует, что существует число $u \in (0,\ \ 1-\bar{\theta}\ )$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\{\eta_n^- \geq un\} < \infty,$$

где

$$\bar{\theta} = \sup_{a,t \geq N_a} f_a'(t) \qquad u \qquad \eta_n^- = \max(0, -\eta_n)$$

Выбирая достаточно большое число $k > 0$ и достаточно малое число $l > 0$, при $n \geq N_a + KN_a^{\alpha}$ имеем

$$(1-\bar{\theta})(n - N_a) \geq (l + u)\, n^{\alpha}$$

и

$$f_a(n) \leq N_a + \bar{\theta}(n - N_a) = n - (1-\bar{\theta})(n - N_a) < n - (l+u)\, n^{\alpha} \tag{9}$$

Из условии 1), 2) и 5) и из первой части леммы 1 следует, что

$$P(\tau > n,\ d < n) \leq P\left(S_n + \eta_n + g(n) < n - (l+u)\, n^{\alpha}\right)$$

для $n \geq m_a$ и

$$\sum_{n=m_a} n^{r-1} P(\tau > n) \leq \sum_{n=m_a} n^{r-1} P(d > n) + \sum_{n=m_a}^{\infty} n^{r-1} P\left(n - S_n > \frac{l}{2} n^{\alpha}\right) +$$

$$+ \sum_{n=m_a}^{\infty} n^{r-1} P\left(\eta_n^- > u\, n^{\alpha}\right) + \sum_{n=m_a}^{\infty} n^{r-1} P\left(-g(n) > \frac{l}{2} n^{\alpha}\right) = o(1) \tag{10}$$

Леммы 3 доказана.

Лемма 4. При выполнении условий теоремы 1 семейство $\left\{\left((\tau_a - \nu_a)^+\right)^r,\ a > 0\right\}$ равномерно интегрируемо.

Доказательство. Положим

$$n_1 = \left[N_a - u\, N_a^{\alpha}\right], \quad n_2 = \left[N_a + u\, N_a^{\alpha}\right], \quad n^* = \left[N_a + k\, N_a^{\alpha}\right],$$

$$\tau' = \max\left(n_1, \min\left(\tau, n^*\right)\right), \quad \nu' = \max\left(n_1, \min\left(\nu, n^*\right)\right).$$

Для $n \ge n_2$ имеем:

$$P(\tau > n) \le P\left(S_n - \theta \cdot n \le N(1-\theta) - g\left(N_a\right)\right) \le P\left(n - S_n \ge (n-N)(1-\theta) - g(N)\right).$$

Из первой части леммы 1 и из условия относительно функции $g(x)$ следует, что для любого $u > 0$

$$\lim_{a\to\infty} \sum_{n=n_2}^{\infty} n^{r-1} P(\nu > n) = 0. \tag{11}$$

Далее, из второй части леммы 1 и из леммы 2 и 3 вытекают, что

$$\lim_{a\to\infty} E\left|\tau - \tau'\right|^r = \lim_{a\to\infty} E\left|\nu - \nu'\right|^r = 0 \tag{12}$$

и

$$P\left(\tau' > \nu' + n\right) \le P\left(d \ge n_1\right) + P\left(\nu \le n_1\right) + P\left(d < n_1 < \nu \le \nu + n < \tau' \le n^*\right).$$

Из определения 1 и из леммы 3, получаем :

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\left(\tau' > \nu' + n\right) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{n^*} n^{r-1} P\left(\tau' > \nu' + n\right) + \sum_{n=n^*}^{\infty} n^{r-1} P\left(\tau' > \nu' + n\right) = \sum_{n=n_0}^{n^*} n^{r-1} P\left(\tau' > \nu' + n\right) + o(1) = \tag{13}$$

$$= \sum_{n=n_0}^{n^*} n^{r-1} P(S_{\nu+n} + \eta_{\nu+n} + g(\nu+n) \le f_a(\nu+n), \nu \in (n_1, n^*-n)) + o(1),$$

$$где\, n_0 = \left[N_a + kN_0^{1/2}\right]$$

На множестве $\{n_1 < \tau \le \tau + n < n^*\}$ из (2) и из условия 2) определения 1 имеем

$$f_a(\nu + n) \le \mu^* n + f_a(\nu).$$

Далее, из (1) следует, что существует константа $0 < M < \infty$, такая, что при $n_1 \le m \le n^*$ выполняются следующие неравенства

$$\left|f_a(m) - N_a - \theta\, m\right| \le M \frac{\left(m - N_a\right)^2}{N_a} \tag{14}$$

и

$$\left|g(\nu + n) - g\left(N_a\right)\right| \le M \frac{\left|\nu + n - N_a\right|}{\sqrt{n_1}} \le \frac{n(1-\mu^*)}{5} + M \frac{\left|\nu - N_a\right|}{\sqrt{n_1}}.$$

На множестве $\{\tau' > \nu' + n\}$ имеем:

$$S_{\nu+n}+\eta_{\nu+n}+g(\nu+n)\le \mu^* n+\left(f_a(\nu)-N_a-\theta\,\nu\right)+S_\nu+g(N_a)\le$$
$$\le \mu^* n+M\frac{(\tau-N_a)^2}{N_a}+M\frac{|\nu-N_a|}{\sqrt{n_1}}+S_\nu+g(\nu+n)+\frac{n(1-\mu^*)}{5}.$$

Поэтому, полагая $\delta'=\dfrac{(1-\mu^*)}{5}$ из (13) находим, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1}P(\tau'>\nu'+n)\le \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1}P(S_\nu+n-S_{\nu+n}\ge\delta' n)+\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1}P\left(\max_{n_1\le i\le n^*}\eta_i^->\delta' n\right)+$$
$$+\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1}P\left(M\frac{(\nu-N_a)^2}{N_a}>\delta' n\right)+\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1}P\left(M\frac{|\tau-N_a|}{\sqrt{n_1}}>\delta' n\right)+o(1)$$

Из леммы 1, 2 и 3 и из условия $E\left(\xi_1^+\right)^{2r}<\infty$ вытекает, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1}P(\tau'>\nu'+n)\to 0,\quad a\to\infty.$$

Отсюда в силу леммы 3, убеждается в справедливости леммы 4.

Лемма 5. Пусть ξ есть целочисленная случайная величина с $E\left(\xi^+\right)^r<\infty$, $r\ge 1$ и пусть существуют константы γ, β и σ, такие, что $0\le\delta<1$, $\beta\,(4\delta)^r\le 2$ и для некоторой $m>\dfrac{1}{1-\delta}$.

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^{r-1}P(\xi\le n)\le\gamma+\beta\sum_{n=m}^{\infty} n^{r-1}P(\delta\,\xi\ge n)<\infty$$

Тогда

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^{r-1}P(\xi\ge n)\le 2\,\gamma.$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 5 из работы [2].

Теперь можно перейти к доказательству утверждения теоремы 1.

Предположим

$n_1=\left[N_a-uN^\alpha\right]$, $n_2=\left[N_a+uN^\alpha\right]$,

$\tau'=\max(n_1,\min(\tau,n_2))$,

$\nu'=\max(n_1,\min(\nu,n_2))$

Заметим, что

$$(\tau-\tau')^+\le(\tau-\nu)^++(\nu-n_2)^+.$$

С помощью (11) и (12) и леммы 4 имеем

$$\lim_{a\to\infty}E|\tau-\tau'|^r=\lim_{a\to\infty}E|\nu-\nu'|^r=0$$

Не трудно видеть, что

$$P(\nu' > \tau + n) \le P(d \ge n_1) + P(\tau \le n_1) + P(\nu \ge n_2) + P(d < n_1 < \tau \le n + \tau < \nu < n_2).$$

В силу леммы 2, из условия 1) определения 1 и из (11) получаем, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\nu' > \tau' + n) = \sum_{n=n_0}^{n_2-n_1} n^{r-1} P(\nu' > \tau + n) \le$$
$$\le \sum_{n=n_0}^{n_2-n_1} n^{r-1} P(d < n_1 < \tau \le \tau + n < \nu < n_2) + o(1) \qquad (15)$$

На множестве $\{\omega : d < n_1 < \tau \le \tau + n < \nu < n_2\}$ имеем

$$S_{\tau+n} + g(N_a) \le N_a + \theta(\tau + n - N_a) \le \mu^* n + (N + \theta(\tau - N) - f_a(\tau)) + S_\tau + \eta_\tau + g(\tau) \quad (16)$$

Из условия 2) относительно функции $g(x)$ в определение 1 следует, что существует константа $K > 0$, не зависящая от u, такая, что

$$g(\tau) - g(\nu) \le K \frac{|\tau - \nu|}{\sqrt{n_1}}$$

и

$$g(\nu) - g(N_a) \le K \frac{|\nu - N|}{\sqrt{N}}.$$

Из условия (1) относительна функции $f_a(t)$в доказываемой теореме находим, что для малых u

$$(N_a + \theta(\tau - N_a) - f_a(\tau)) - (N_a + \theta(\nu - N_a) - f_a(\nu)) \le |\nu - \tau| (u\, K\, N_a^{\alpha-1}) \quad (17)$$

Из (14) следует, что

$$(N_a + \theta(\nu - N_a) - f_a(\nu)) \le K \frac{(\nu - N_a)^r}{N_a}$$

и

$$(N_a + \theta(\tau - N_a) - f_a(\tau)) + g(\tau) - g(N_a) \le \gamma' |\nu' - \tau'| + K \frac{(\nu - N_a)^r}{N_a} + K \frac{(\nu - N_a)^r}{\sqrt{N_a}},$$

где

$$\gamma = uKN_a^{\alpha-1} + KN_a.$$

В силу (16) имеем

$$S_{\tau+n} - S_\tau \le \mu^* n + \eta_\tau + \gamma |\nu' - \tau'| + K \frac{(\nu - N_a)^r}{N_a} + K \frac{|\nu - N_a|}{\sqrt{N_a}} \quad (18)$$

Учитывая (18), из (15) получаем, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\nu' > \tau' + n) \le \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(S_\tau + n - S_{\tau+n} \ge u' n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\left(\max_{n_1 \le i \le n_2} \eta_i > u'n\right) +$$
$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\gamma(\tau-\nu) \ge u'n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\left(K\left(\frac{(\nu-N_a)^2}{N_a} + \frac{|\nu-N_a|}{\sqrt{N_a}}\right) \ge u'n\right) + \tag{19}$$
$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\gamma(\nu'-\tau') \ge u'n) + o(1), \quad a \to \infty, \quad где \quad u' = \frac{1-\mu^*}{5}$$

Выбирая достаточно малое β, так что $\beta(4\delta/u')^p \le 2$, из (19) в силу лемм 1 и 4 имеем:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\nu' - \tau' > n) \le \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\delta\,|\nu' - \tau'| \ge u'n) + o(1)$$

при $a \to \infty$.

С помощью лемм 4, 5 из последнего соотношения и из (18) получаем, что при $a \to \infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P(\nu' - \tau' > n) = o(1)$$

и следовательно, семейство $|\tau_a - \nu_a|^r, a > 0$ является равномерно интегрируемым.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теоремы проводится с помощью аналогичных выкладок по схеме доказательства теоремы 1. При этом нужно показать, что утверждение леммы 3 справедливо и для граничного функционала $V_a(U_a)$. С этой целью положим $n^* = [N_a + KN_a^\alpha]$.

В силу (9) для любого $n \ge n^*$ имеем:

$$P(V_a > n, d < n) \le P(\sup_{i \ge n}(i - S_i - (u+l)i^\alpha) + \eta_i^- - g(i)) \ge 0)$$

На множестве $(\omega: \ n_1 \le \nu \le n^*)$ можно оценить $\sup_{i \ge n} \dfrac{\eta^-_{\tau+i}}{i}$:

$$\sup_{i \ge n} \frac{\eta^-_{\tau+i}}{i} \le \max_{n \le i \le KN_a^\alpha} \frac{\eta^-_{\tau+i}}{i} + \sup_{i \ge \min(n;\, KN_a^\alpha)} \frac{\eta^-_{\tau+i}}{i} \le \max_{n \le i \le n^* + KN_a^\alpha} \frac{\eta^-_i}{n} + \sup_{i \ge n} \frac{\eta^-_i}{i^\alpha C(\alpha, a)},$$

где $C(\alpha, a) = \sup_{i \ge KN_a^\alpha} \dfrac{(\nu + i)^\alpha}{i}$.

Поскольку $K > 0$ - константа произвольная, то ее можно выбрать так, что для любого числа $\delta > 0$

$$\sup_{i \ge K N_a^\alpha} \frac{(n^* + i)^\alpha}{i} \le 1 + \delta, \text{ при } \alpha = 1$$

и

$$\sup_{i \geq K N_a^{\alpha}} \frac{(n^*+i)^{\alpha}}{i} \leq \delta, \text{ при } \alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

После этого, повторяя аналогично все выкладки и рассуждения, проведенные в ходе доказательства теоремы 1 можно показать, что семейство $|V_a - \tau_a|$, $a > 0$ равномерно интегрируемо.

Из равномерной интегрируемости семейства $|V_a - \tau_a|$, $a > 0$ следует, что семейство $|U_a - \tau_a|$, $a > 0$ также равномерно интегрируемо [2] (см. также [1]).

Доказательство следствия 1. Из условия (2) определения 1 следует, что

$$g(N_a) = O\left(\sqrt{N_a}\right).$$

Для линейного момента остановки ν_a имеет место [1]:

$$E\nu_a = (\mu - \theta)^{-1} C_a + O(1) = N_a - (\mu - \theta) g(N_a) + O(1).$$

Тогда из утверждения теоремы 1 при $r = 1$ вытекает (5).

Вторая часть следствия 1 вытекает из того факта, что для линейного момента первого выхода ν_a [1]:

$$D\nu_a = (\mu - \theta)^{-3} \sigma^2 C_a + O\left(\sqrt{C_a}\right) = (\mu - \theta)^{-2} \sigma^2 N_a + O\left(\sqrt{N_a}\right)$$

Следствие 2 доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Woodroofe M. Nonlinear renewal theory in sequential analysis. 1982. SIAM, 119 p.
2. Zhang C. A nonlinear renewal theory. The Annals of probability. 1988, vol. 16 №2, p. 793-824.
3. Рагимов Ф.Г. О равномерной интегрируемости семейства моментов первого выхода случайного блуждания за нелинейную границу. - Известия БГУ №2, 2005, с. 46-53.
4. Амосова Н.Н. О вероятностях односторонних уклонений сумм независимых случайных величин.- Мат. Заметки, 1978, т. 24, №1, с. 123-131.
5. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.

ЩЯЙЯЪАНЛАНМЫШ ТЯСАДЦФИ ДОЛАШМАНЫН ИЛК ДЯФЯ ГЕЙРИ-ХЯТТИ СЯР-ЩЯДДЯН КЯНАРА ЧЫХМАСЫ МОМЕНТЛЯРИ АИЛЯСИНИН МЦНТЯЗЯМ ИНТЕГРАЛЛАНМАСЫ ЩАГГЫНДА

Ф.Щ.РЯЩИМОВ

АННОТАСИЙА

Мягалядя щяйяъанланмыш тясадцфи долашманын илк дяфя гейри-хятти сярщяддян кянара чыхмасы моментляри аилясиня бахылыр. Хятти вя гейри-хятти моментляр аилясинин фяргинин мцнтязям интегралланмасы мясяляси юйрянилир. Хцсуси щалда гейри-хятти дайанма моментинин орта гиймяти вя дисперсийасы цчцн асимптотик дцстурлар алынмышдыр. Бундан ялавя, гейри-хятти бярпа олчцсцнцн асимптотикасы тапылмышдыр.

ON THE UNIFORM INTEGRABILITIES OF THE FAMILY OF THE FIRST MOMENT OF PERTURBED RANDOM WALK FOR THE NONLINEAR BOUNDARY

F.G.RAGIMOV

ABSTRACT

This paper concerns the family of the first moment of the pertrubed random walk for the nonlinear boundary. The uniform integrabilities of the differences of the linear and nonlinear stopping moments are studied. In particular, asymptotic formulas of the mean value and the variance of the nonlinear stopping moment are obtained. Also, expansions for nonlinear reneval measure are obtained.